5 Diagonalización de endomorfismos

5.1 Endomorfismo

Se llama **endomorfismo** a una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ de un espacio vectorial V en si mismo.

5.2 Cambio de base en un endomorfismo

Sea V un espacio vectorial y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo cuya matriz respecto de la base B (lo usual, en endomorfismos, es considerar la misma base en los espacios inicial y final) es A, es decir:

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \qquad \text{donde} \quad A = M(f, B, B) = M(f, B)$$

¿Cuál es la matriz de f respecto de otra base B'? Si $P = M(Id, B', B)$ es la matriz del cambio de base de B' a B, es decir la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B' en la base B, entonces

$$\begin{tikzcd} V^B \arrow[r, "A"] \arrow[d, phantom] & V^B \arrow[d, "P^{-1}"] \\ V^{B'} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"] & V^{B'} \end{tikzcd} \qquad \text{de donde} \quad C = M(f, B') = P^{-1}AP$$

y $f(\mathbf{u}) = C\mathbf{u}$ respecto de la base B'.

5.3 Endomorfismo o matriz diagonalizable

Un **endomorfismo** f sobre un espacio vectorial real V es **diagonalizable** si existe una base B^* respecto de la cuál su matriz $D = M(f, B^*)$ es diagonal, es decir si existe $B^* = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tales que $f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq n$.
Identificando el endomorfismo con su matriz real asociada, una **matriz** cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice **diagonalizable** si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $D = P^{-1}AP$ es diagonal.

Nota: Aunque aquí sólo se consideran espacios vectoriales y matrices reales, con lo que se obtienen diagonalizaciones reales, todo lo que se diga es igualmente cierto para otro cuerpo $\mathbb{K}$, con lo que se obtienen diagonalizaciones en $\mathbb{K}$.

5.4 Autovalores y autovectores

Sea A la matriz asociada a un endomorfismo f sobre el espacio vectorial real V de dimensión n. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es **autovalor** si existe un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, que se llamará **autovector**, tal que $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Puesto que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Longleftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

que es un sistema homogéneo, la existencia del vector no nulo (solución no nula del sistema homogéneo) viene garantizada si

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I) < n \quad \text{lo que equivale a que} \quad |A - \lambda I| = 0$$

Por lo tanto, los autovalores de la matriz A (o endomorfismo asociado) son las raíces reales del **polinomio característico** $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$, y los autovectores asociados son los vectores no nulos del núcleo de la aplicación asociada a la matriz $A - \lambda I$.
Se llama **espectro** de A, que se representa por $\sigma(A)$, al conjunto de todos sus autovalores, y **subespacio propio** asociado al autovalor λ a todos sus autovectores asociados más el vector nulo, es decir a

$$S(\lambda) = \{\mathbf{v} : (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$$

5.5 Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo asociado a la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, respecto de la base canónica. El polinomio característico, y sus raíces, son

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -4 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \text{ con } m(1) = 1 \\ \lambda = 2, \text{ con } m(2) = 2 \end{array} \right.$$

donde $m(\lambda)$ indica la multiplicidad del autovalor λ. El espectro es $\sigma(A) = \{1, 2\}$.
Los subespacios propios asociados a estos autovalores son:

$$S(1) = \mathrm{Ker}(A - I) = \left\{ \mathbf{v} : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \mathbf{v} : \begin{array}{r} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right\} = L\left(\{(1,2,1)\}\right)$$

$$S(2) = \mathrm{Ker}(A - 2I) = \left\{ \mathbf{v} : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} = \{\mathbf{v} : 2x - z = 0\}$$
$$= L\left(\{(1,0,2), (0,1,0)\}\right)$$

Es fácil comprobar que los autovectores $\mathbf{v}_1 = (1,2,1) \in S(1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,2) \in S(2)$, y $\mathbf{v}_3 = (0,1,0) \in S(2)$ forman base. Puesto que $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1$ y $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_3$, la matriz respecto de esta base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es

$$D = M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es diagonal, luego el endomorfismo f y la matriz A son diagonalizables. Para relacionar las matrices A y D se recurre al diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \\ \Big\uparrow P & & \Big\downarrow P^{-1} \\ (\mathbb{R}^3)^{B} & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3)^{B} \end{array} \qquad \text{donde} \quad P = M(Id, B, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar la relación $D = P^{-1}AP$.

Es inmediato de las definiciones la siguiente caracterización:

5.6 Caracterización de endomorfismo diagonalizable

Un endomorfismo f sobre un espacio vectorial real V, de dimensión n, es diagonalizable si y sólo si existen n autovalores reales (algunos de ellos pueden ser iguales) y una base formada por autovectores.

5.7 Independencia de autovectores asociados a distintos autovalores

Autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.
Demostración: Sea f un endomorfismo sobre V, y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ autovectores asociados, respectivamente, a los autovalores λ y μ, $\lambda \neq \mu$. Entonces

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{cases} f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \lambda(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha\lambda\mathbf{u} + \beta\mu\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \alpha\lambda\mathbf{u} + \beta\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \beta(\lambda - \mu)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Longrightarrow \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$$

Luego $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes.

5.8 Algoritmo de diagonalización

Sea f el endomorfismo sobre V asociado a la matriz A. El algoritmo que hay que seguir para diagonalizar es:

- Se resuelve la ecuación $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$. Si alguna de sus raíces no es real, el endomorfismo no es diagonalizable.
- Para cada autovalor $\lambda \in \sigma(A)$ se halla su subespacio propio $S(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I)$, comprobando que
$$\dim S(\lambda) = m(\lambda) \qquad \text{(multiplicidad de } \lambda)$$
Si algún autovalor no verifica lo anterior, el endomorfismo no es diagonalizable.
- La base respecto de la que el endomorfismo es diagonal es la formada por la unión de todas las bases de los subespacios propios, y la matriz diagonal es aquella cuyos elementos son, y en el mismo orden, los autovalores asociados a cada autovector de la base.

5.9 Propiedades

1. El polinomio característico de un endomorfismo, respecto de cualquier base, es siempre el mismo.
Demostración: Si A y C son las matrices de un endomorfismo f respecto de dos bases distintas, están relacionadas por la matriz del cambio de base por una relación del tipo $C = P^{-1}AP$. Entonces:
$$|C - \lambda I| = \left|P^{-1}AP - \lambda IP^{-1}P\right| = \left|P^{-1}(A - \lambda I)P\right| = \left|P^{-1}\right| \cdot |A - \lambda I| \cdot |P| = |A - \lambda I|$$
pues $\left|P^{-1}\right| = |P|^{-1}$.
2. La suma de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su traza.
Demostración: Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los n autovalores de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de

dimensión n. Puesto que los autovalores son las raíces del polinomio característico, se tiene que

$$|A - \lambda I| = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) + P_{n-2}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

donde $P_{n-2}(\lambda)$ es un polinomio de grado menor o igual que $n - 2$ en λ. Igualando los coeficientes de grado $n - 1$, en cada una de las dos expresiones anteriores, se obtiene:

$$(-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$$

de donde

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + \ldots + a_{nn} = traza(A)$$

3. El producto de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su determinante.
Demostración: Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los n autovalores de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de dimensión n. Entonces

$$|A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Haciendo $\lambda = 0$ en la expresión anterior, se obtiene:

$$|A| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

5.10 Consecuencias inmediatas de las propiedades anteriores

- Los autovalores de un endomorfismo son los mismos respecto de cualquier base.
- Cualquier matriz de un endomorfismo, respecto de cualquier base, tiene la misma traza y el mismo determinante.
- Una matriz es singular si y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor.